Олимпиада СибГУТИ

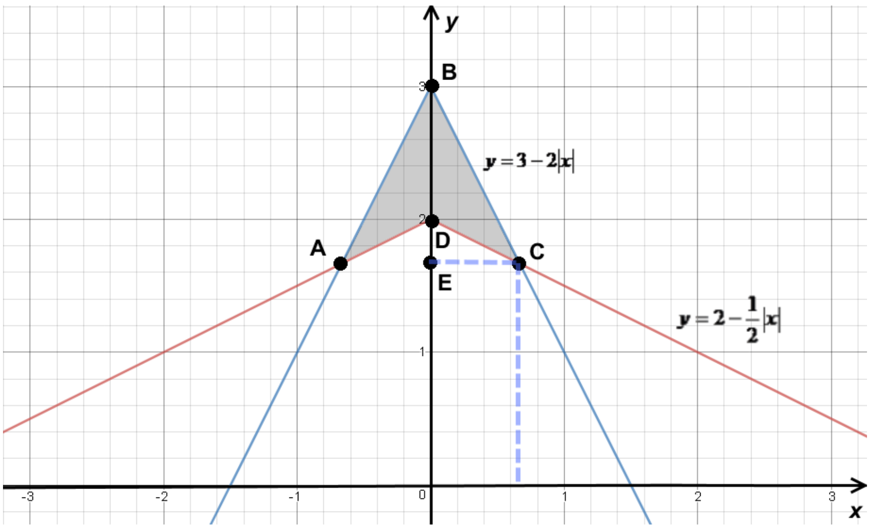
математика

25 марта 2018г.

1. (10, 11 классы) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 2 - \frac{1}{2}|x|, \quad y = 3 - 2|x| \qquad \text{(10 баллов)}$$

Решение 1. Фигура, ограниченная линиями $y = 2 - \frac{1}{2}|x|$ и $y = 3 - 2|x|$, изображена на рисунке



По условию задачи требуется найти площадь четырехугольника *ABCD*.

Данная фигура симметрична относительно оси *Oy*, поэтому $S(ABCD) = 2S(BCD)$.

Треугольник *BCD* лежит в области, где $x \ge 0$, поэтому он ограничен прямыми $x = 0$, $y = 2 - \frac{1}{2}x$, $y = 3 - 2x$.

Найдем координаты точки *C*, как точки пересечения прямых:

$$\begin{cases} y = 2 - \frac{1}{2}x \\ y = 3 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{5}{9} \end{cases}$$

Тогда $S(ABCD) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot BD \cdot CE = 1\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.

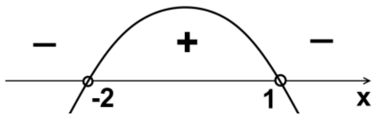
Ответ: $\frac{2}{3}$

2. (10, 11 классы) Решить уравнение: $\dfrac{\sin\frac{x}{3}+\sqrt{3}\cos\frac{x}{3}-1}{\sqrt{2-x^2-x}}=0$ (10 баллов)

Решение 2. Найдем область определения:

$$2-x^2-x>0$$

$$2-x^2-x=0 \;\Rightarrow\; x_1=-2;\; x_2=1$$



$x\in(-2\;;\;1)$

Решение исходного уравнения равносильно (с учетом рассмотренной ОДЗ) решению уравнения

$$\sin\frac{x}{3}+\sqrt{3}\cos\frac{x}{3}-1=0$$

Решим его:

$$\frac{1}{2}\sin\frac{x}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{x}{3}=\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{x}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{x}{3}=\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k, n\in Z\\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k, n\in Z\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{2}+6\pi k, n\in Z\\ x=\dfrac{3\pi}{2}+6\pi k, n\in Z\end{array}\right.$$

Учитывая ОДЗ, проведем отбор корней:

$$-2<\frac{3\pi}{2}+6\pi k<1$$

$$-2-\frac{3\pi}{2}<6\pi k<1-\frac{3\pi}{2}$$

$$-\frac{1}{3\pi}-\frac{1}{4}<k<\frac{1}{6\pi}-\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{6\pi}-\frac{1}{4}\approx-0{,}2$$

$$-\frac{1}{3\pi}-\frac{1}{4}\approx-0{,}4$$

Значит, нет таких значений k

$$-2<-\frac{\pi}{2}+6\pi n<1$$

$$-2+\frac{\pi}{2}<6\pi n<1+\frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{1}{3\pi}+\frac{1}{12}<n<\frac{1}{6\pi}+\frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{6\pi}+\frac{1}{12}\approx0{,}1$$

$$-\frac{1}{3\pi}+\frac{1}{4}\approx-0{,}02$$

Значит, $n=0$ и $x=-\dfrac{\pi}{2}$

Ответ: $x=-\dfrac{\pi}{2}$

3. (10, 11 классы) Имеются три куска сплавов олова с цинком, содержащие 20%, 80%, 60% цинка соответственно. Сплавив эти три куска, получили сплав, содержащий 60% олова. Если бы третий кусок сплавили с половиной второго куска и с $\frac{1}{3}$ частью первого куска, то получили бы сплав, в котором 52% олова. Во сколько раз третий кусок легче первого? (10 баллов)

Решение 3. Пусть три первоначальные куски сплавов имеют массы x, y, z.
Тогда эти куски содержат цинка $0{,}2\cdot x$, $0{,}8\cdot y$, $0{,}6\cdot z$ соответственно.
Сплавив эти куски в первом случае, получим общую массу $(x+y+z)$, массу олова $0{,}6(x+y+z)$ и массу цинка $0{,}4(x+y+z)$.
Сплавив части этих кусков во втором случае, получим
общую массу $\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y+z\right)$, массу олова $0{,}52\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y+z\right)$ и
массу цинка $0{,}48\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y+z\right)$.
Относительно цинка составим уравнения для первого и второго случаев:

$$\begin{cases} 0{,}2x+0{,}8y+0{,}6z=0{,}4(x+y+z) \\ 0{,}2\cdot\frac{1}{3}x+0{,}8\cdot\frac{1}{2}y+0{,}6z=0{,}48\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y+z\right) \end{cases}$$

Решим эту систему:

$$\begin{cases} 2x+8y+6z=4x+4y+4z \\ 4x+24y+36z=9{,}6x+14{,}4y+28{,}8z \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x+4y+2z=0 \\ -5{,}6x+9{,}6y+7{,}2z=0 \end{cases}$$

Так как нас интересует отношение $\frac{x}{z}$, то разделим оба уравнения на z:

$$\begin{cases} -\frac{x}{z}+2\cdot\frac{y}{z}+1=0 \\ -7\cdot\frac{x}{z}+12\cdot\frac{y}{z}+9=0 \end{cases}$$

Пусть $\frac{x}{z}=a$, $\frac{y}{z}=b$, тогда:

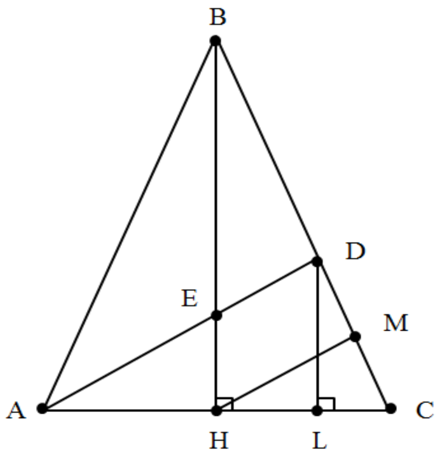
$$\begin{cases} -a+2b+1=0 \\ -7a+12b+9=0 \end{cases}$$

Откуда получаем $a=3$, $b=1$. Значит, $\frac{x}{z}=a=3$

Ответ: в 3 раза.

4. (10, 11 классы) Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10см, а высота к основанию - 8см. Через вершину угла при основании проведена прямая, делящая высоту в отношении 3:1, считая от вершины. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного внутри данного треугольника. (10 баллов)

Решение 4.



Дано: ΔABC - равнобедренный,
$AB = BC = 10 см,$
$BH \perp AC,$
$BH = 8 см,$
$BE : EH = 3:1$
Найти: AD

1) $BE : EH = 3:1 \Rightarrow BE = 3x; \quad EH = x.$
2) $BH = 8 \Rightarrow 3x + x = 8 \Rightarrow x = 2 см, \ BE = 6 см, \ EH = 2 см.$
3) Проведем HM параллельно $AD,$ тогда по теореме Фалеса (или из подобных треугольников) следует, что $BD : DM = 3:1,$ то есть $BD = 3y, \ DM = y.$
4) По теореме Фалеса (или из подобных треугольников) следует, что $DM : MC = AH : HC,$ то есть $DM : MC = 1:1$ (высота в равнобедренном треугольнике является медианой) значит, $MC = y$ и $BD : DM : MC = 3:1:1.$
5) Проведем DL параллельно BH , тогда по теореме Фалеса (или из подобных треугольников) получаем, что $HL : LC = BD : DC,$ то есть $HL : LC = 3:2.$ Тогда $HL = 3z, \ LC = 2z.$
6) По теореме Пифагора в ΔBHC : $HC = \sqrt{100 - 64} = 6 см$
7) $HC = 6 \quad \Rightarrow 3z + 2z = 6 \quad \Rightarrow z = \frac{6}{5} см, \ HL = \frac{18}{5} см, \ LC = \frac{12}{5} см.$
8) $\Delta AEH \sim \Delta ADL$ (по углам), тогда

$$\frac{DL}{EH} = \frac{AL}{AH} \Rightarrow DL = \frac{6 + \frac{18}{5}}{6} \cdot 2 = \frac{16}{5} см.$$

9) По теореме Пифагора в ΔADL : $AD = \sqrt{\left(\frac{48}{5}\right)^2 + \left(\frac{16}{5}\right)^2} = \frac{16}{5} \cdot \sqrt{10} см.$

Ответ: $\frac{16}{5} \cdot \sqrt{10} см.$

5. (10 класс) Решите неравенство: $\left|1-\left|1-x^2\right|\right| > 3x$ (10 баллов)

Решение 5. Раскроем внутренний модуль:

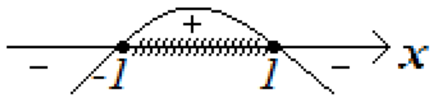
$I \begin{cases} 1-x^2 \ge 0 \\ \left|1-1+x^2\right| > 3x \end{cases}$ или $II \begin{cases} 1-x^2 < 0 \\ \left|1+1-x^2\right| > 3x \end{cases}$

Решим систему I

$I.1.$ $1-x^2 \ge 0$

$1-x^2 = 0$

$x = \pm 1$



$x \in [-1;1]$

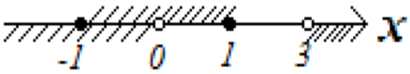
$I.2.$ $x^2 > 3x$

$x^2 - 3x > 0$

$x(x-3) = 0$

$x = 0$ *или* $x = 3$

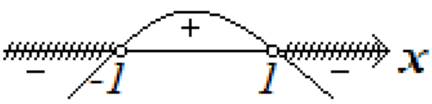
Итак, система I имеет решения:



$x \in [-1;0)$

Решим систему II

$II.1.$ $1-x^2 < 0$



$x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$

$II.2.$ $\left|2-x^2\right| > 3x$

Раскроем модуль:

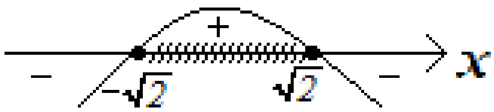
$II.2.1.$ $\begin{cases} 2-x^2 \ge 0 \\ 2-x^2 > 3x \end{cases}$ $II.2.2.$ $\begin{cases} 2-x^2 < 0 \\ x^2-2 > 3x \end{cases}$

Решим каждую из систем:

$II.2.1.1.$ $\quad 2 - x^2 \geq 0$

$$2 - x^2 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

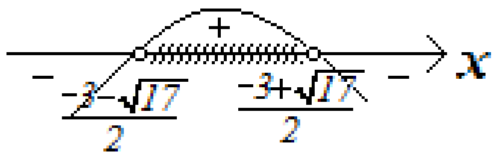


$$x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$$

$II.2.1.2.$ $\quad -x^2 - 3x + 2 > 0$

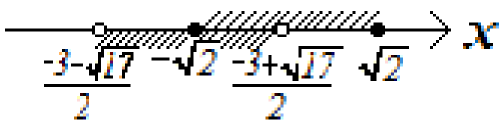
$$x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$



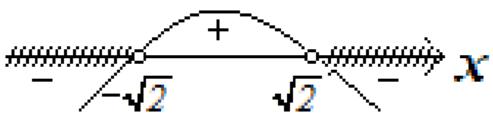
$$x \in \left(\frac{-3 - \sqrt{17}}{2}; \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \right)$$

$II.2.1.$



$$x \in \left[-\sqrt{2}; \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \right)$$

$II.2.2.1.$ $\quad 2 - x^2 < 0$

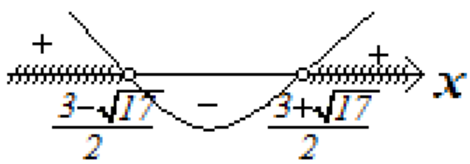


$$x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$$

$II.2.2.2.$ $\quad x^2 - 3x - 2 > 0$

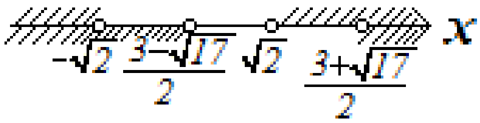
$$x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$



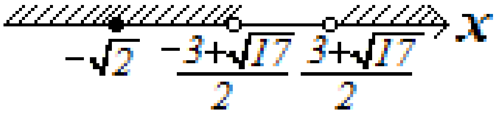
$$x \in \left(-\infty; \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \right) \cup \left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}; +\infty \right)$$

II.2.2.



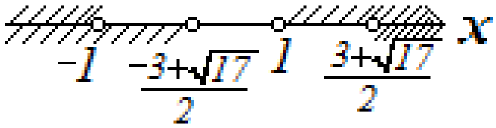
$$x\in(-\infty;-\sqrt{2})\cup\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2};+\infty\right)$$

Таким образом, решение неравенства $II.2$:



$$x\in\left(-\infty;\frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2};+\infty\right)$$

Получаем, что решение системы II:



$$x\in(-\infty;-1)\cup\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2};+\infty\right)$$

Объединяем решения систем I и II, получаем:

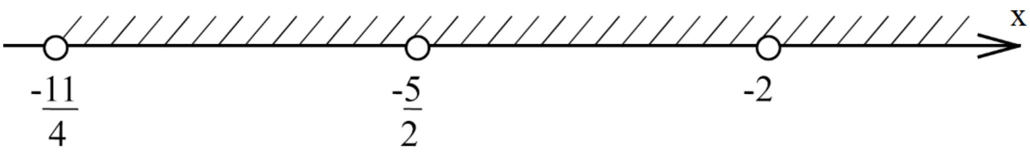
$$x\in(-\infty;0)\cup\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2};+\infty\right)$$

Ответ: $x\in(-\infty;0)\cup\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2};+\infty\right)$

5. (11 класс) Решите неравенство: $\dfrac{\log_2\dfrac{(4x+11)^7}{(x+2)^2}}{\log_2(4x+11)^6}\le 1$ (10 баллов)

Решение 5. Найдем область определения:

$$\begin{cases}\dfrac{(4x+11)^7}{(x+2)^2}>0\\(4x+11)^6>0\\\log_2(4x+11)^6\ne 0\end{cases}\quad<=>\quad\begin{cases}4x+11>0\\x+2\ne 0\\4x+11\ne 0\\4x+11\ne\pm 1\end{cases}\quad<=>\quad\begin{cases}x>\dfrac{-11}{4}\\x\ne -2\\x\ne\dfrac{-11}{4}\\x\ne\dfrac{-5}{2}\\x\ne -3\end{cases}$$



$$x \in \left(-\frac{11}{4};-\frac{5}{2}\right) \cup \left(-\frac{5}{2};-2\right) \cup (-2;+\infty)$$

Решим первоначальное уравнение

$$\frac{\log_2 \dfrac{(4x+11)^7}{(x+2)^2}}{\log_2 (4x+11)^6} \le 1$$

$$\log_{(4x+11)^6} \frac{(4x+11)^7}{(x+2)^2} \le 1$$

$$\frac{1}{6}\log_{|4x+11|} \frac{(4x+11)^7}{(x+2)^2} \le 1$$

С учетом ОДЗ получаем, что $|4x+11| = 4x+11$, тогда

$$\frac{1}{6}\log_{4x+11} \frac{(4x+11)^7}{(x+2)^2} \le 1$$

$$\frac{1}{6}\left(\log_{4x+11}\left|(4x+11)^7\right| - \log_{4x+11}(x+2)^2\right) \le 1$$

С учетом ОДЗ $\left|(4x+11)^7\right| = (4x+11)^7$, поэтому

$$\frac{1}{6}\left(7\log_{4x+11}(4x+11) - \log_{4x+11}(x+2)^2\right) \le 1$$

$$7 - \log_{4x+11}(x+2)^2 \le 6$$

$$\log_{4x+11}(x+2)^2 \ge 1$$

Используя метод рационализации, получаем

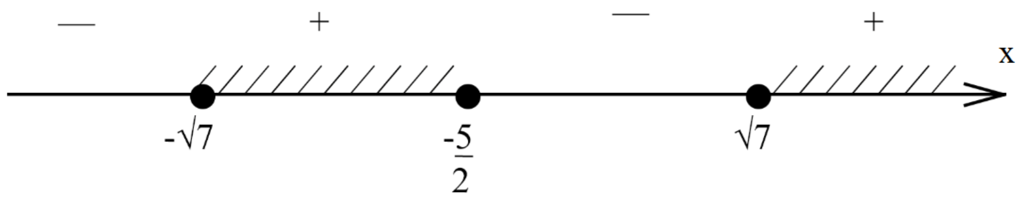
$$(4x+11-1)\left((x+2)^2 - (4x+11)\right) \ge 0$$

$$(4x+10)(x^2-7) \ge 0$$

Решаем методом интервалов:

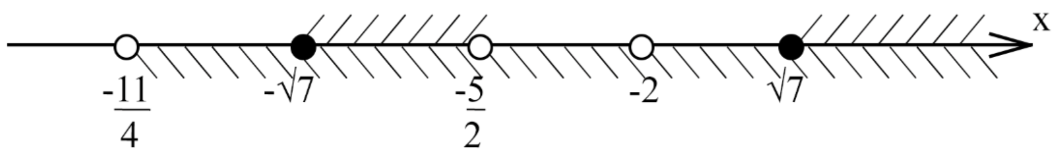
$4x+10=0 \qquad x^2-7=0$

$x=-\dfrac{5}{2} \qquad x=\pm\sqrt{7}$



$x\in\left[-\sqrt{7};-\dfrac{5}{2}\right]\cup\left[\sqrt{7};+\infty\right)$

Учтем область определения:



Таким образом, $x\in\left[-\sqrt{7};-\dfrac{5}{2}\right]\cup\left[\sqrt{7};+\infty\right)$

Ответ: $x\in\left[-\sqrt{7};-\dfrac{5}{2}\right]\cup\left[\sqrt{7};+\infty\right)$